

FÍSICA (Informática de Gestión)
PRUEBA PRESENCIAL ORDINARIA
FEBRERO DE 2003

PROBLEMA 1.1.1

Dado el sistema de cargas puntuales indicado en la figura P1.1.1:

- 1) Calcular el campo y potencial en el origen de coordenadas.
- 2) Obtener el flujo total a través de la superficie esférica de radio R ($R > d$) y centro en O.

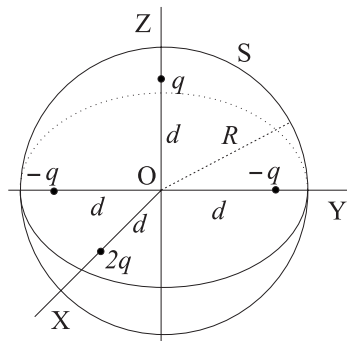


Figura P1.1.1

Solución

1) *Campo y potencial en el origen de coordenadas*

1a)

El campo se calcula aplicando la relación:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

En este problema los vectores de posición respectivos son:

$$\mathbf{r} = 0 ; \quad \mathbf{r}_1 = d\mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{r}_2 = d\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}_3 = d\mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r}_4 = -d\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = -d\mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = -d\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = -d\mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_4 = d\mathbf{u}_y$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_4| = d$$

$$q_1 = 2q ; \quad q_2 = -q ; \quad q_3 = q ; \quad q_4 = -q$$

Aplicando los datos anteriores a la ecuación que nos permite calcular el campo tenemos que,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{2q(-d\mathbf{u}_x)}{d^3} + \frac{-q(-d\mathbf{u}_y)}{d^3} + \frac{q(-d\mathbf{u}_z)}{d^3} + \frac{-q(-d\mathbf{u}_y)}{d^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o d^2} (-2\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_z)$$

$$\mathbf{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_o d^2} (2\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z)$$

1b)

El potencial se calcula mediante la siguiente relación,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Llevando los datos indicados anteriormente para las cargas y los vectores de posición tendremos que,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{d} (2q - q + q - q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{d}$$

2) Flujo total del campo

Como todas las cargas están dentro de la esfera de radio R , el flujo total se calcula aplicando el teorema de Gauss.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_o} \sum q_i$$

Como en este caso

$$\sum q_i = 2q - q + q - q = q$$

El flujo total será,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\epsilon_o}$$

PROBLEMA 1.1.2

Dado el circuito indicado en la figura P1.1.2a, calcular la corriente que circula por las pilas. Indicar razonadamente la(s) pila(s) que suministra(n) energía y la(s) que recibe(n).

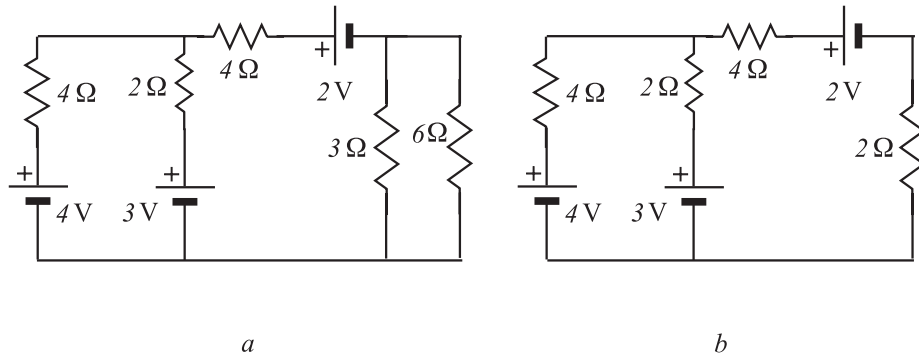


Figura P1.1.2

Solución

Para simplificar el cálculo reducimos la malla de tres a dos lazos teniendo en cuenta que las resistencias de 3 y 6 Ω están en paralelo y las podemos sustituir por su resistencia equivalente sin modificar la corriente que circula por las pilas.

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow R_e = 2$$

Utilizando la resistencia equivalente, las cauciones de los dos lazos que muestra la figura P1.1.2b son:

$$\begin{aligned} 4 - 3 &= (4 + 2)I_1 - 2I_2 \rightarrow 1 = 6I_1 - 2I_2 \\ 3 - 2 &= -2I_1 + (2 + 4 + 2)I_2 \rightarrow 1 = -2I_1 + 8I_2 \end{aligned}$$

Las corrientes se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de Cramer.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{10}{44} = \frac{5}{22} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8}{44} = \frac{4}{22}$$

$$I_c = I_1 - I_2 = \frac{5}{22} - \frac{4}{22} = \frac{1}{22}$$

La corriente I_1 atraviesa la pila de 4 voltios, I_2 atraviesa la pila de 2 voltios e I_c la de 3 voltios.

Dado el sentido de las corrientes I_1 , I_c e I_2 , la pila de 4 voltios suministra energía, ya que la corriente entra por el polo negativo y sale por el positivo, es decir los electrones aumentan su energía al atravesar la pila. Las pilas de 3 y 2 voltios reciben energía por que las respectivas corrientes I_c e I_2 entran por el polo positivo y salen por el negativo.

PROBLEMA 1.1.3

Una espira abierta de la forma indicada en la figura P1.1.3 está situada en el plano ZY. Dicha espira está en el seno de un campo magnético variable $\mathbf{B} = B_o \text{ sen } \omega t \mathbf{u}_x$. Calcular la diferencia de potencial V_{AB} inducida en la espira.

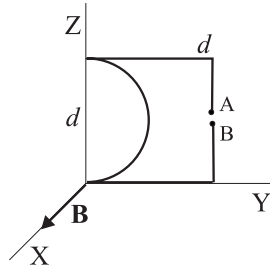


Figura P1.1.3

Solución

La diferencia de potencial entre los puntos A y B de la espira se calcula mediante la ley de Faraday,

$$V_{AB} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

En primer lugar debemos obtener el flujo del campo magnético a través de la espira.

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = (B_o \text{ sen } \omega t \mathbf{u}_x) \cdot S(-\mathbf{u}_x)$$

El recorrido de la espira en sentido horario tiene como resultado que $\mathbf{S} = S(-\mathbf{u}_x)$.

La superficie de la espira es la diferencia entre la superficie del cuadrado de lado d y el semicírculo de radio $d/2$.

$$S = d^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = d^2 \left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$$

El flujo será,

$$\Phi = -B_o d^2 \left(1 - \frac{\pi}{8}\right) \text{ sen } \omega t$$

Por tanto la diferencia de potencial entre los puntos A y B es,

$$V_{AB} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_o d^2 \left(1 - \frac{\pi}{8}\right) \omega \cos \omega t$$

PROBLEMA 1.2.1

Tenemos un sistema de condensadores unidos a una pila de 10 V (véase la figura P1.2.1). Calcular la carga en el condensador C_2 antes y después de cerrar el interruptor S.

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0,1 \mu\text{F} = 10^{-7} \text{ F}.$$

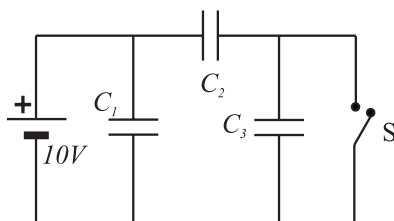


Figura P1.2.1

Solución

1) *Antes de cerrar S*

Los condensadores C_2 y C_3 están en serie y unidos a la pila de 10 voltios. Por tanto,

$$V = 10 = V_2 + V_3$$

Dada la relación entre carga, potencial y capacidad,

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow V_2 = \frac{Q_2}{C_2} \quad \text{y} \quad V_3 = \frac{Q_3}{C_3}$$

Por otro lado sabemos que cuando los condensadores están en serie su carga es la misma, en consecuencia, si llevamos los valores de V_2 y V_3 a la expresión inicial,

$$10 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

Como las dos capacidades son iguales, $C_1 = C_2 = 10^{-7} \text{ F}$.

$$10 = 2 \frac{Q_2}{C_2} \rightarrow Q_2 = \frac{10}{2} C_2 = 5 \times 10^{-7}$$

$$Q_2 = 5 \times 10^{-7} \text{ C}$$

El condensador C_3 tiene la misma carga, es decir,

$$Q_3 = Q_2 = 5 \times 10^{-7} \text{ C}$$

2) *Después de cerrar S*

Cuando cerramos el interruptor S, cortocircuitamos el condensador C_3 , por tanto la pila de 10 voltios se aplica directamente al condensador C_2 . En estas condiciones,

$$Q_3 = 0 \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 \times 10 = 10^{-6} \text{ C}$$

PROBLEMA 1.2.2

En la figura se muestra un sistema de tramos filiformes por los que circula una corriente I . El tramo recto paralelo al eje X se extiende desde $x = 0$ hasta $x \simeq \infty$; el tramo sobre el eje Y está

comprendido entre $y = -a$ hasta $y \simeq -\infty$. Calcular el campo magnético creado en el origen de coordenadas O.

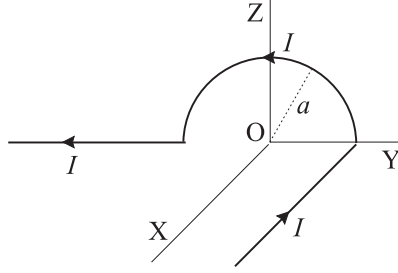


Figura P1.2.2

Solución

Calculamos en primer lugar los campos debidos a cada tramo.

1) *Tramo paralelo al eje X*

Aplicamos los resultados obtenidos en el ejemplo 6.1 cuando los límites son α_1 y α_2 .

En nuestro caso $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$ y $R = a$. Teniendo en cuenta la regla del tornillo, en O $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_z$.

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o I}{4\pi a} [\text{sen}]_0^{\pi/2} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \mathbf{u}_z$$

2) *Tramo sobre el eje Y*

En este tramo se cumple que $d\mathbf{l}$ es paralelo al $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, por lo que $d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ y como consecuencia,

$$\mathbf{B}_2 = 0$$

3) *Tramo circular*

Aplicamos los resultados obtenidos en el ejemplo 6.2. Ahora los límites de integración para φ son 0 y π , $R = a$. En el punto O, aplicando la regla del tornillo, la dirección y sentido del campo es el de \mathbf{u}_x .

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\pi}{a} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_o I}{4a} \mathbf{u}_x$$

El campo total en el origen de coordenadas O es la suma de los obtenidos en los apartados anteriores,

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \mathbf{u}_z + \frac{\mu_o I}{4a} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_o I}{4a} \left(\frac{1}{\pi} \mathbf{u}_z + \mathbf{u}_x \right)$$

PROBLEMA 1.2.3

La figura P1.2.3 muestra un circuito de corriente alterna. Calcular el módulo y fase de la corriente que suministra el generador.

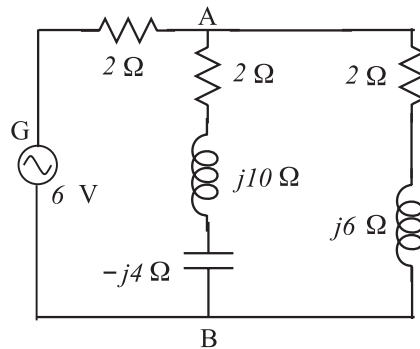


Figura P1.2.3

Solución

Calculamos en primer lugar las impedancias de las ramas que están en paralelo.

$$\mathbf{Z}_1 = 2 + j10 - j4 = 2 + j6$$

$$\mathbf{Z}_2 = 2 + j6$$

La composición de las dos en paralelo es,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_p} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} = 2 \frac{1}{2 + j6} = \frac{1}{1 + j3}$$

por tanto,

$$\mathbf{Z}_p = 1 + j3$$

La impedancia \mathbf{Z}_p está en serie con la resistencia de 2Ω , y por tanto la impedancia total será,

$$\mathbf{Z}_T = 2 + \mathbf{Z}_p = 3 + j3 = 3(1 + j)$$

La corriente que suministra el generador es,

$$\mathbf{I} = \frac{6}{\mathbf{Z}_T} = \frac{6}{3(1 + j)} = \frac{6(1 - j)}{3 \times 2} = 1 - j$$

El módulo y la fase serán,

$$I = \sqrt{2} \quad ; \quad \tan \theta = \frac{-1}{1} = -1$$

$$I = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$